

Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

12 de Dezembro de 2006

Semana 11

1. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ +1 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

2. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Considere as funções definidas por $f(x) = 1$ e $g(x) = x$. Determine:

- (a) as séries de Fourier associadas a f e g no intervalo $[-1, 1]$;
- (b) as séries de senos associadas a f e g no intervalo $[0, 1]$;
- (c) as séries de cossenos associadas a f e g no intervalo $[0, 1]$.

5. Considere a equação de propagação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (*)$$

- (a) Mostre que as suas soluções estacionárias (isto é, que não dependem do tempo) são da forma $u(x) = Ax + B$.
- (b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0, t) = T_1$, $u(L, t) = T_2$.
- (c) Resolva a equação (*) para $0 \leq x \leq 1$ e para as condições iniciais e de fronteira

$$u(0, t) = 20, \quad u(1, t) = 60, \quad u(x, 0) = 75.$$

6. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (t \geq 0, x \in [0, 1]) \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \\ u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 1, \end{cases}$$

onde c é um parâmetro real.

7. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y \in [0, 1]) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = \cos(2\pi x), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, & \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = \cos(2\pi y). \end{cases}$$

8. Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, & (x \in [0, \pi]) \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \sin x. \end{cases}$$

9. Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, & (x \in [0, 2\pi]) \\ u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = x \end{cases}$$

10. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x, 0, t) = x, \quad u(x, 1, t) = x \\ u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 1 \\ u(x, y, 0) = x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \cos(2\pi(x - y)) - \cos(2\pi(x + y)) \end{cases}$$

para $x, y \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}$.